Roll No. .....

AH–5113

B. Sc. (Home Science)/B. Sc. (Bio.)/B. C. A./
B. Com./B. B. A./B. A. (First Semester)
Generic Elective Course (MAGE-01)
EXAMINATION, Dec./Jan., 2024-25

MATHEMATICS

(Elementary Calculus)

Time : Three Hours

Maximum Marks : 70

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Answer all questions.

खण्ड—अ

(Section—A)

1. सभी वस्तुनिष्ठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए : 10×1=10

Answer all the objective type questions :

(i) 'गणित चक्र चूड़ामणि' की उपाधि से किसे सम्मानित किया गया था ?

P. T. O.

Who was honoured by the title 'Ganita Chakra Chudamani' ?

(ii) P-श्रेणी परीक्षण को लिखिए।

Write P-series test.

(iii) सांतत्य का कार्य लिखिए।

Write the function of Continuity.

(iv) रौले प्रमेय को लिखिए।

Write Rolle's theorem.

(v) मैक्लॉरिन श्रेणी लिखिये।

Write Maclaurin's series.

(vi) वक्रता त्रिज्या के लिए कार्तीय सूत्र लिखिए।

Write Cartesian formula for radius of curvature.

(vii) नति-परिवर्तन बिन्दु की परिभाषा लिखिये।

Define point of inflexion.

(viii) $\int \sin^n x\,dx$ के लिए समानयन सूत्र लिखिये।

Write reduction formula for $\int \sin^n x\,dx$.

(ix) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ के लिए वाली का सूत्र लिखिए जब n कोई धन विषम पूर्णांक हो।

Write Walli's formula for $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$, when n is any positive odd integer.

(x) $\int_0^{2a} f(x)dx$ का निश्चित समाकल प्रगुण लिखिये।

Write the property of definite integral for $\int_0^{2a} f(x)dx$.

2. सभी लघु उत्तरीय प्रश्नों के उत्तर दीजिए : 5×4=20

Attempt all short answer type questions :

(i) आपस्तम्ब के योगदान और संक्षिप्त जीवनी लिखिए।

Write contribution and a brief biography of Apasthamba.

अथवा

(*Or*)

निम्नलिखित श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+.....+\frac{1}{2n-1}+.....$$

Test for convergence of the following series :

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+.....+\frac{1}{2n-1}+.....$$

(ii) अन्तराल $[-1,1]$ में फलन $f(x)=x^2$ के लिए रौले प्रमेय का सत्यापन कीजिए।

Verify Role's theorem in the interval $[-1,1]$ for the function $f(x)=x^2$.

अथवा

(*Or*)

मैक्लॉरिन प्रमेय से e^x का प्रसार कीजिए।

Expand e^x by Maclaurin's theorem.

(iii) वक्र $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3+xy-y^2-1=0$ की सभी अनंतस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

Find the asymptotes of the curve :

$$x^3+2x^2y-xy^2-2y^3+xy-y^2-1=0.$$

अथवा

(*Or*)

वक्र $y=x^3$ के नति-परिवर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए।

Find the points of inflexion of the curve $y=x^3$.

(iv) $\int\frac{xdx}{(1+x)^{1/3}-(1+x)^{1/2}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Evaluate :

$$\int\frac{xdx}{(1+x)^{1/3}-(1+x)^{1/2}}.$$

अथवा

(*Or*)

$\int\sin^7 x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Find the value of $\int\sin^7 x\,dx$.

खण्ड—ब

(Section—B)

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। 4×10=40

Attempt any *two* parts from each question.

3. (a) लीलावती के विशेष सन्दर्भ में भास्कराचार्य के कार्यों पर चर्चा कीजिए।

Discuss the work of Bhaskaracharya with special reference to Leelavati (Lilavati).

(b) निम्नलिखित फलन के सांतत्य की जाँच $x=1$ पर कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geq 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$$

Test the function for continuity at $x=1$:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x\geq 1\\ 1-x, & x<1\end{cases}$$

(c) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x)=|x-5|$, $x=5$ पर सतत् है, परन्तु अवकलनीय नहीं है।

Show that the function $f(x)=|x-5|$ is continuous at $x=5$, but not differentiable.

4. (a) यदि $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$, तो सिद्ध कीजिये कि :

$$x^2y_2+xy_1+y=0$$

तथा $x^2y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2+1)y_n=0$ ।

If $y=a\cos(\log x)+b\sin(\log x)$, then prove that :

$$x^2y_2+xy_1+y=0$$

and $x^2y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2+1)y_n=0$.

(b) लैग्रांज का मध्यमान प्रमेय लिखिये और सिद्ध कीजिए।

State and prove Lagrange's mean value theorem.

(c) $2x^3+7x^2+x-1$ को $(x-2)$ की घातों में टेलर प्रमेय से विस्तारित कीजिए।

Expand $2x^3+7x^2+x-1$ in power of $(x-2)$ by Taylor's theorem.

5. (a) सिद्ध कीजिये कि हृदयाभ $r = a(1-\cos\theta)$ के किसी बिन्दु (r,θ) पर वक्रता त्रिज्या $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$ होती है।

Prove that the radius of curvature at any point (r,θ) of the cardioid $r = a(1-\cos\theta)$ is $\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$.

(b) दर्शाइये कि वक्र $y^2 = (x-a)^2(x-b)$ के नति-परिवर्तन बिन्दु रेखा $3x + a = 4b$ पर स्थित है।

Show that the points of inflexion of the curve $y^2 = (x-a)^2(x-b)$ lie on the line $3x + a = 4b$.

(c) वक्र $y^2(2a-x) = x^3$ का अनुरेखण कीजिये।

Trace the curve $y^2(2a-x) = x^3$.

6. (a) मान ज्ञात कीजिये :

$$\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx$$

Evaluate :

$$\int \sin^5 x \cos^4 x \, dx$$

(b) सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{2a} x^{9/2}(2a-x)^{-1/2}\,dx = \frac{63\pi a^5}{8}$$

Prove that :

$$\int_0^{2a} x^{9/2}(2a-x)^{-1/2}\,dx = \frac{63\pi a^5}{8}.$$

(c) सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

Prove that :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$